Matemática - Curso de Nivelación 2023 - Etapa II - UNS

Primera Evaluación - 16/06/2023 - Turno Mañana - Tema 1

Ejercicio 1:

Dada la expresión algebraica $\dfrac{(ab-1)\sqrt[3]{a^6b^{-1}}}{a^2+1}$, determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Marcar la respuesta correcta V o F en cada inciso.

1. [V] Al sustituir $a=\sqrt{3}$ y $b=-1$ la expresión se reduce a $\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4}$. /8
2. [V] Al sustituir $b=a^3$ la expresión se reduce a a^3-a. /8
3. [F] Al sustituir $a=1$ y $b=0$, la expresión vale 0. /3
4. [V] Al sustituir $a=1$ y $b=-1$, la expresión da un número racional. /4

Desarrollo:

1. Al sustituir $a=\sqrt{3}$ y $b=-1$ la expresión toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{[\sqrt{3}(-1)-1]\sqrt[3]{(\sqrt{3})^6(-1)^{-1}}}{(\sqrt{3})^2+1} &= \frac{(-\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{-3^3}}{3+1}\\ &= \frac{(-\sqrt{3}-1)(-3)}{4}\\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. Al sustituir $b=a^3$ la expresión toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{(aa^3-1)\sqrt[3]{a^6(a^3)^{-1}}}{a^2+1} &= \frac{(a^4-1)\sqrt[3]{a^{6-3}}}{a^2+1}\\ &= \frac{(a^2-1)\cancel{(a^2+1)}\sqrt[3]{a^3}}{\cancel{a^2+1}} = a^3-a\end{aligned}$$

3. La expresión no está definida para el valor $b=0$. Entre sus factores se encuentra la expresión $b^{-1}=\frac{1}{b}$ la cual no es posible evaluar si $b=0$.

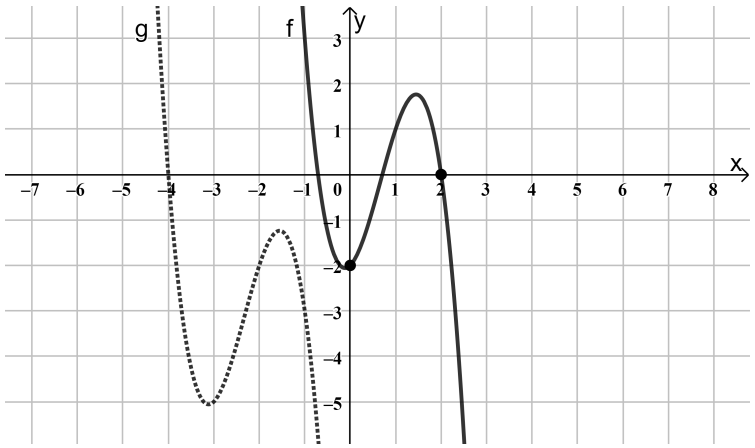
4. Al sustituir $a=1$ y $b=-1$, la expresión toma la forma

$$\frac{(1(-1)-1)\sqrt[3]{1^6(-1)^{-1}}}{1^2+1} = \frac{(-2)\sqrt[3]{-1}}{2} = 1$$

Ejercicio 2:

El siguiente gráfico muestra dos funciones: la función f (en línea continua) y la función g (en línea punteada). La función f es una función polinómica dada por

$$f(x) = -2x^3+4x^2+x-2.$$



1. Determinar cuál de la siguientes es una expresión para la función g. Marcar la respuesta correcta. /8

   (a) [ ] $g(x) = f(x+3) + 3$,
   (c) [X] $g(x) = f(x+3) - 3$,
   (b) [ ] $g(x) = f(x-3) + 3$,
   (d) [ ] $g(x) = f(x-3) - 3$.

   Justificación: Notar que para obtener el gráfico de g a partir del gráfico de f se desplazó el gráfico de f 3 unidades hacia la izquierda ($3 \leftarrow$), lo que se traduce en la expresión $f(x-(-3)) = f(x+3)$, y 3 unidades hacia abajo ($3 \downarrow$) lo que se traduce en $f(x) - 3$. Combinando ambos desplazamientos resulta la expresión $g(x) = f(x+3) - 3$.

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Marcar la respuesta correcta V o F en cada inciso.

   (a) [F] f pasa por el punto $(-2, 0)$. /6
   (b) [F] La imagen de la función f es $[-2, +\infty)$. /6
   (c) [V] $f(-1) = 3$. /6
   (d) [F] Las raíces de f son $2, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$. /8
   (e) [V] $(h \circ f)(1) = \frac{1}{2}$ siendo $h(x) = \frac{1}{x+1}$. /8

   Desarrollo: /8

   (a) Esto puede verse en el gráfico, donde claramente en $x = -2$ la función no corta al eje Y. También se puede calcular $f(-2)$ usando la fórmula que define a f, reemplazando en ella con $x = -2$ y viendo que el resultado no es 0.

   (b) Esto puede verse en el gráfico, la función toma valores desde $-\infty$ a $+\infty$.

   (c) Esto se concluye usando la fórmula que define a f, reemplazando con $x = -1$.

   (d) Sabiendo que $x = 2$ es una raíz, la cual está explícitamente indicada en el gráfico, pueden encontrarse las otras dos raíces aplicando primeramente la regla de Ruffini con $x = 2$, lo cual nos deja con la expresión $f(x) = (x-2)(-2x^2+1)$, y luego factorizar la expresión cuadrática como una diferencia de cuadrados:

$$f(x) = -2(x-2)\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

(e) $(h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(-2(1)^3 + 4(1)^2 + 1 - 2) = h(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 3:

/20

Hallar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente inecuación y expresar el conjunto solución como unión de intervalos:

$$-4 \leq 6x + \frac{-14}{x+2}.$$

Desarrollo: En primer lugar, notemos que $x \neq -2$. Ahora,

$$\begin{aligned} -4 \leq 6x + \frac{-14}{x+2} \implies 0 &\leq 4 + 6x + \frac{-14}{x+2} \\ 0 &\leq \frac{4(x+2) + 6x(x+2) - 14}{x+2} \\ 0 &\leq \frac{4x + 8 + 6x^2 + 12x - 14}{x+2} \\ 0 &\leq \frac{6x^2 + 16x - 6}{x+2} \end{aligned}$$

Podemos factorizar la expresión cuadrática

$$6x^2 + 16x - 6 = 0 \iff x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-6)}}{2 \cdot 6} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{12} \begin{cases} \nearrow & x_1 = -3 \\ \searrow & x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

De esta forma, la inecuación inicial se reduce a

$$0 \leq \frac{6(x+3)(x+\frac{1}{3})}{x+2}.$$

Encontramos la solución de esta desigualdad analizando los signos de cada factor.
COMPLETAR
Finalmente, la solución en forma de unión de intervalos es $S =$.

Ejercicio 4:

/15

Un televisor se vendió en \$80.325 después de efectuar un descuento del 15%. ¿Cuál era el valor del televisor antes del descuento?
Sobre e valor real x del televisor, realizamos un descuento del 15%. Esto significa que el monto \$80.325 corresponde al 85% = 100%- 15% del valor real. Matemáticamente esto se expresa

$$80.325 = \frac{85}{100}x$$

de donde se deduce fácilmente que $x = \dfrac{80.325 \cdot 100}{85} = 94.500$ Es decir, el valor del televisor antes del descuento era \$94.500.